SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti 5 martie 2005

CLASA A XI-a

Subiectul 1. a) Se arată uşor că prin permutarea unor linii matricea A se transformă în I_n. Rezultă $\det A \in \{\pm 1\}$. . . . . 2 puncte

b) Din a) rezultă că $\det(A_1) \cdots \det(A_p) \neq 0$, deci $\det(A_k) \neq 0$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, p$. Cum produsul a două matrice din H este tot o matrice din H, va fi suficient să demonstrăm afirmaţia pentru $p = 2$, soluţia fiind dată apoi de o inducţie evidentă. . . . . .1 punct

Fie $A, B \in H$. astfel încât $AB \in P$. Cum $\det A \neq 0$ şi $\det B \neq 0$, rezultă că pe fiecare linie şi pe fiecare coloană a matricelor A şi B avem cel puţin un element nenul. Dacă pe o linie din matricea A avem cel puţin 2 elemente nenule, atunci linia din produsul AB va fi o sumă de cel puţin 2 linii din matricea B fiecare din ele înmulţită cu un număr natural nenul. Prin urmare suma tuturor elementelor matricei AB va fi strict mai mare decât n, fals.

Deci pe orice linie din matricea A avem un singur element nenul. Acela nu poate fi decât 1. Rezultă că matricea A este din P. De aici deducem că şi matricea B este din P, deoarece este produsul dintre $A^{-1} \in P$ şi o matrice din P. . . . . 4 puncte

Subiectul 2. Presupunem că f nu e monotonă şi considerăm $a < b < c$ astfel încât $f(a) < f(b) > f(c)$. Cum f are proprietatea lui Darboux, există $c_1 \in (a, b)$ şi $c_2 \in (b, c)$ cu $f(c_1) = f(c_2) = \lambda < f(b)$. . . . . 2 puncte

Fie $\alpha = \sup\{x \in [c, b] \mid f(x) = \lambda\}$ şi $\beta = \inf\{x \in [b, c_2] \mid f(x) = \lambda\}$. Din continuitatea lui f rezultă că $f(\alpha) = f(\beta) = \lambda$ şi $\alpha < b < \beta$ . . . . 2 puncte

Din ipoteză rezultă existenţa unui punct $\gamma \in (\alpha, \beta)$ cu $f(\gamma) = \lambda$, ceea ce contrazice alegerea numerelor α sau β. . . . . 3 puncte

Subiectul 3. a) Dacă $\operatorname{rang}(A) = 3$, inegalitatea este evidentă. Dacă $\operatorname{rang}(A) = 1$, nu e nimic de demonstrat. . . . . 1 punct

Fie deci $\operatorname{rang}(A) = 2$; atunci $\operatorname{rang}(B) \leq 1$. Din inegalitatea lui Sylvester ($\operatorname{rang}(XY) \geq \operatorname{rang}(X) + \operatorname{rang}(Y) - 3$ sau din argumente geometrice), avem $\operatorname{rang}(A^2) \geq 1 \geq \operatorname{rang}(B) \geq \operatorname{rang}(B^2)$. . . . . 2 puncte

b) Dacă luăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avem $\operatorname{rang}(A) = 2, \operatorname{rang}(B) = 1$ iar $A^2 = O_4$ şi $B^2 = B$. Deci $\operatorname{rang}(A^2) < \operatorname{rang}(B^2)$. Aceasta arată că polinomul $f = aX^2$ şi analog polinomul $f = aX^n$ cu $n \geq 2$ nu verifică relaţia. ....2 puncte

Arătăm acum că dacă polinomul f are o rădăcină complexă nereală $z = a + ib$, atunci el nu verifică cerinţa. Într-adevăr pentru $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu $c \neq 0$ şi $f(c) \neq 0$ avem $\operatorname{rang}(A) = 2, \operatorname{rang}(B) = 1$ iar $\operatorname{rang} f(A) = 0$ şi $\operatorname{rang} f(B) = 1$. Mai arătăm că polinomul nu poate avea rădăcini reale nenule. Într-adevăr, dacă $a \in \mathbb{R}^*$ şi $f(a) = 0$, pentru $A = aI_4$ şi B ca mai sus, obţinem o contradicţie. ....1 punct

Rezultă că polinoamele căutate sunt de forma $f = aX$, $a \in \mathbb{R}^*$. . 1 punct

Subiectul 4. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $a = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{Q}, x < \alpha\}$, $b = \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{Q}, x > \alpha\}$. Presupunem f strict crescătoare şi obţinem $a \leq b$. Dacă $a < b$ alegem $r \in \mathbb{Q}$ cu $a < r < b$. Rezultă că există $s \in \mathbb{Q}$ cu $f(s) = r$. Dacă $s < \alpha$ atunci $a \geq f(s) = r > a$, contradicţie. Dacă $s > \alpha$ avem $b \leq f(s) = r < b$, din nou contradicţie. Rezultă $a = b$ şi definim $F(\alpha) = a$ .... 2 puncte

Fie $x < y, x, y \in \mathbb{R}$ şi $r, s \in \mathbb{Q}$ cu $x < r < s < y$. Din definiţia lui F rezultă că $F(x) \leq F(r) = f(r) < f(s) = F(s) \leq F(y)$, deci F este strict crescătoare. ....1 punct

Pentru a proba surjectivitatea, fie $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid f(r) < z\}$. Cum A este mărginită superior fie α supremumul său. Din construcţia lui F avem că $F(\alpha) = z$. Cum F este bijectivă şi monotonă rezultă că F este continuă ....1 punct

Dacă G este o prelungire continuă a lui f pentru $x \in \mathbb{R}$ alegem $r_n \in \mathbb{Q}$ cu $\lim r_n = x$. Din continuitate deducem $\lim F(r_n) = F(x)$, $\lim G(r_n) = G(x)$, iar cum $F(r_n) = f(r_n) = G(r_n)$, rezultă $F(x) = G(x)$. ....1 punct

b) Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = x^3 - 2x$. Cum $G(0) = G(\sqrt{2})$ rezultă că G nu este injectivă. . . . . 1 punct

Dacă $x, y \in \mathbb{Q}$ cu $G(x) = G(y)$ şi $x \neq y$ obţinem $x^2 + xy + y^2 = 2$ sau $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 2$, deci ecuaţia $X^2 + 3Y^2 = 2$ ar avea soluţii raţionale. Dacă $X = \frac{m}{n}, Y = \frac{p}{q}$, fracţii ireductibile, din $m^2q^2 + 3p^2n^2 = 2n^2q^2$ am avea $n^2|q^2, q^2|3n^2$, de unde $n^2 = q^2$. De aici $m^2+3p^2 = 2n^2$, deci $m^2 \equiv 2n^2(\mathrm{mod} 3)$. Rezultă că m şi n sunt multipli de 3, contradicţie. Deci G este injectivă pe $\mathbb{Q}$. . . . . 1 punct